پروژه دوم درس طراحی الگوریتم

دانشگاه فردوسی مشهد – گروه علوم کامپیوتر

دکتر رضا قنبری - بهار ۱۴۰۵

پس از وقوع طوفان‌های مغناطیسی مخرب در امپراتوری، وظیفه طراحی و بازسازی شبکه مخابراتی بین شهرهای اصلی به شما سپرده شده است. دپارتمان ارتباطات امپراتوری از شما خواسته است تا در چهار فاز مختلف، شبکه‌ای طراحی کنید که علاوه بر کم‌هزینه بودن، در برابر قطع شدن کابل‌ها نیز مقاوم باشد و تحلیل دقیقی از رفتار الگوریتم‌های به‌کاررفته در این شبکه ارائه دهید.

۱ توضیحات کلی

به شما نقشه‌ای شامل n شهر و مجموعه‌ای از کابل‌های مخابراتی پیشنهادی داده می‌شود. این پروژه در سه بخش اصلی تعریف می‌شود:

- **کابل‌های اصلی:** برای ساخت هسته اولیه و درختی شبکه استفاده می‌شوند.
- **کابل‌های پشتیبان:** برای مقاوم‌سازی شبکه در برابر قطعی‌های احتمالی استفاده می‌شوند.
- **بازسازی شبکه:** ساخت مجدد شبکه به طور بهینه با در نظر گرفتن محدودیت‌ها.

شما باید الگوریتم‌هایی برای طراحی و مقاوم‌سازی این شبکه پیاده‌سازی کنید. علاوه بر پیاده‌سازی، لازم است در قالب یک گزارش فنی، الگوریتم‌های انتخاب‌شده را تحلیل کرده و درباره بهینگی یا عدم بهینگی راهبردهای پیشنهادی استدلال کنید. کیفیت تحلیل نظری و مستندسازی بخشی از ارزیابی پروژه خواهد بود.

۲ فاز اول: احداث شبکه درختی پایه (MST)

در ابتدا، لیست تمام کابل‌های اصلی پیشنهادی بین شهرها به همراه هزینه ساخت هر کابل به شما داده می‌شود. شما باید شبکه اصلی را به صورت یک درخت پوشای کمینه (MST) بسازید تا تمام n شهر با کمترین هزینه ممکن به یکدیگر متصل شوند. این درخت پایه، هسته اصلی ارتباطات امپراتوری را تشکیل می‌دهد.

فرمت ورودی

```
n e
u1 v1 w1
u2 v2 w2
...
ue ve we
```

در خط اول اعداد n (تعداد شهرها) و e (تعداد کابل‌های اصلی) داده می‌شود.
در e خط بعدی، هر خط شامل سه عدد خواهد بود:

- u_i : شهر مبدأ

- v_i : شهر مقصد
- w_i : هزینه ساخت کابل

فرمت خروجی

```
minimum_cost
n-1
u_1 v_1
u_2 v_2
...
u_n-1 v_n-1
```

در خط اول، کمترین هزینه کل ممکن برای اتصال تمام شهرها چاپ شود.
در خط دوم، تعداد یال‌های درخت پوشای کمینه چاپ شود (که برابر $n-1$ است).
در $n-1$ خط بعدی، یال‌های انتخاب‌شده در درخت پوشای کمینه چاپ شوند.
ترتیب چاپ یال‌ها اهمیتی ندارد.

۳ فاز دوم: افزایش پایداری

شبکه مخابراتی درختی یک نقطه ضعف حیاتی دارد: قطع شدن هر یک از کابل‌های اصلی، کل شبکه را به دو بخش مجزا تقسیم می‌کند. می‌دانیم طوفانی در راه است که دقیقاً یکی از کابل‌های اصلی را قطع خواهد کرد (متأسفانه مشخص نیست کدام کابل).

برای رفع این مشکل، مجموعه‌ای شامل m کابل پشتیبان به شما داده می‌شود که فعال‌سازی هر کدام هزینه‌ای دارد. اگر یک کابل پشتیبان بین دو بخش جداشده وجود داشته باشد، شبکه همچنان متصل باقی می‌ماند.

هدف این فاز، انتخاب مجموعه‌ای از کابل‌های پشتیبان برای مقاوم‌سازی شبکه است. شما باید یک الگوریتم حریصانه طراحی و پیاده‌سازی کنید که با استفاده از اطلاعات موجود، تعدادی از کابل‌های پشتیبان را انتخاب کند تا پس از قطع شدن هر یک از کابل‌های درخت پوشای کمینه، شبکه همچنان متصل باقی بماند.

لازم است در گزارش پروژه، معیار انتخاب حریصانه خود را به طور دقیق تعریف کرده و نحوه عملکرد الگوریتم را توضیح دهید.

فرمت ورودی

```
m
a1 b1 c1
a2 b2 c2
...
am bm cm
```

پس از ورودی‌های فاز اول، در یک خط عدد m (تعداد کابل‌های پشتیبان) داده می‌شود. در m خط بعدی، هر خط شامل سه عدد خواهد بود:

- a_i : شهر مبدأ
- b_i : شهر مقصد

- c_i : هزینه فعال‌سازی کابل پشتیبان

فرمت خروجی

در صورتی که مقاوم‌سازی ممکن نباشد:

```
NO
```

در صورتی که مقاوم‌سازی ممکن باشد:

```
YES
total_backup_cost
k
u_1 v_1
u_2 v_2
...
u_k v_k
```

- اگر با استفاده از کابل‌های پشتیبان داده‌شده نتوان شبکه را در برابر قطع شدن هر یال درخت پوشای کمینه مقاوم کرد، تنها عبارت NO چاپ شود.
- در غیر این صورت:
  - در خط اول عبارت YES چاپ شود.
  - در خط دوم مجموع هزینه کابل‌های پشتیبان انتخاب‌شده چاپ شود.
  - در خط سوم تعداد کابل‌های پشتیبان انتخاب‌شده (k) چاپ شود.
  - در k خط بعدی دو سر کابل‌های پشتیبان انتخاب‌شده چاپ شوند.

ترتیب چاپ یال‌ها اهمیتی ندارد.

۴ فاز سوم: یافتن بهینه‌ترین مجموعه کابل‌های پشتیبان

دپارتمان ارتباطات از پاسخ فاز دوم راضی نیست! خزانه‌داری امپراتوری اعلام کرده که با وجود خطر طوفان قریب‌الوقوع باید پس‌انداز کند تا بتواند از پس هزینه‌های سرسام‌آور خساراتی که به خدمات و زیرساخت‌های اساسی وارد می‌شود برآید؛ بنابراین از شما خواسته شده تا مجددا بررسی کنید و راهی کم‌هزینه‌تر بیابید. ابتدا در گزارش پروژه نشان دهید که راهبرد حریصانه لزوماً به جواب بهینه منتهی نمی‌شود.

به طور مشخص، لازم است هر دو مورد زیر مورد بررسی و اثبات قرار گیرند:

۱. راهبرد حریصانه الزاماً کم‌هزینه‌ترین زیرگراف دو-یال-همبند (2-edge-connected) ممکن را تولید نمی‌کند.

۲. راهبرد حریصانه الزاماً کم‌هزینه‌ترین روش برای تبدیل درخت پوشای کمینه به یک زیرگراف دو-یال-همبند را تولید نمی‌کند.

استدلال‌ها، مثال‌ها و تحلیل‌های ارائه‌شده باید به اندازه کافی دقیق باشند تا عدم بهینگی الگوریتم را به صورت قانع‌کننده نشان دهند.

حال باید الگوریتم بهینه‌ای برای مسئله فاز دوم بیابید. انتخاب زیرمجموعه‌ای از کابل‌های پشتیبان با کمترین هزینه ممکن، به گونه‌ای که پس از قطع شدن هر یک از یال‌های درخت پوشای کمینه، شبکه همچنان متصل باقی بماند. یکی از اعضای تیم‌تان روش Branch and Bound را پیشنهاد می‌دهد. می‌دانیم که Branch and Bound در صورت طراحی درست همواره به جواب بهینه می‌رسد. پس چالش اصلی کنترل مرتبه زمانی از طریق هرس مناسب است. در گزارش پروژه، موارد زیر را به طور دقیق شرح دهید:

- **ساختار درخت جستجو:** نحوه انشعاب (Branching) روی انتخاب یا عدم انتخاب هر کابل پشتیبان را توضیح دهید. همچنین نحوه نمایش وضعیت هر گره در درخت جستجو را شرح دهید.
- **تابع کران پایین:** کران پایین ریاضی دقیق و کارآمد برای هزینه کابل‌ها تعریف کنید که شاخه‌های غیربهینه را به خوبی هرس کند. نشان دهید این کران پایین هیچ‌گاه جواب بهینه را از بین نمی‌برد.

استدلال‌ها، مثال‌ها و تحلیل‌های ارائه‌شده باید به اندازه کافی دقیق باشند تا عدم بهینگی الگوریتم حریصانه را به صورت قانع‌کننده نشان دهند. پیشنهاد می‌شود برای هر مورد یک نمونه عددی مشخص ارائه شود که در آن خروجی فاز دوم و فاز سوم با یکدیگر مقایسه شده باشند.

فرمت ورودی

ورودی این فاز دقیقاً همان ورودی فاز دوم است.

فرمت خروجی

در صورتی که مقاوم‌سازی ممکن نباشد:

```
NO
```

در صورتی که مقاوم‌سازی ممکن باشد:

```
YES
optimal_backup_cost
k
u_1 v_1
u_2 v_2
...
u_k v_k
```

- اگر با استفاده از کابل‌های پشتیبان داده‌شده نتوان شبکه را در برابر قطع شدن هر یال درخت پوشای کمینه مقاوم کرد، تنها عبارت NO چاپ شود.
- در غیر این صورت:
  - در خط اول عبارت YES چاپ شود.
  - در خط دوم کمینه مجموع هزینه کابل‌های پشتیبان انتخاب‌شده چاپ شود.
  - در خط سوم تعداد کابل‌های پشتیبان انتخاب‌شده (k) چاپ شود.

- در k خط بعدی دو سر کابل‌های پشتیبان انتخاب‌شده چاپ شوند.

ترتیب چاپ یال‌ها اهمیتی ندارد.

۵ فاز چهارم: بازسازی شبکه

طوفان فرا رسید و آسیب گسترده‌تر از پیش‌بینی ستاد مدیریت بحران بود و شبکه زیرساخت ارتباطات با مشکل جدی مواجه شده‌است و باید آن را بازسازی کنیم. خزانه‌داری با کسری بودجه وحشتناکی مواجه شده اما به دستور شخص امپراتور، شبکه ارتباطات یکی از اولویت‌های امپراتوری‌ست و باید به هر نحو که شده بازسازی شود. دپارتمان خزانه‌داری اعلام کرده که بودجه بازسازی شبکه را به طور کامل تقبل می‌کند اما هزینه نگهداری و تعمیر (Maintenance) باید تماما از محل درآمد و بودجه سالیانه خود دپارتمان ارتباطات پرداخت شود. بنابراین حسابداران دپارتمان ارتباطات امپراتوری دست به کار شدند و رقمی را به عنوان «حداکثر مجموع هزینه‌های نگهداری یک‌ساله شبکه» به مدیر بخش شما اعلام کردند. این رقم تنها برای وضعیت حساس امسال است و از سال بعد (همچون گذشته) در بودجه سالیانه دپارتمان مد نظر قرار خواهد گرفت.

در این فاز، برای هر کابل پیشنهادی دو پارامتر تعریف می‌شود: هزینه ساخت اولیه و هزینه نگهداری یک‌ساله. وظیفه شما طراحی و پیاده‌سازی الگوریتمی است که با توجه به کابل‌های سالم مانده، کم‌هزینه‌ترین درخت پوشا (بر اساس هزینه ساخت) را بیابد، به طوری که مجموع هزینه نگهداری کابل‌های انتخاب‌شده کمتر یا مساوی سقف بودجه تعیین‌شده B باشد. هزینه نگهداری کابل‌های سالم مانده جدا از B محاسبه شده و این رقم تنها برای کابل‌های جدید است.

این مسئله به عنوان درخت پوشای کمینه مقید (Constrained MST) شناخته می‌شود. ابتدا در گزارش پروژه تحلیل کنید که چرا الگوریتم‌های حریصانه کلاسیک (مانند کروسکال و پریم) با وجود قید بودجه نگهداری، دیگر نمی‌توانند جواب بهینه را تضمین کنند (یک مثال نقض کوچک بیاورید). سپس نشان دهید که چگونه می‌توان با استفاده از راهبرد Branch and Bound و طراحی یک تابع کران پایین مناسب، فضای حالت را پیمایش و بهینه‌ترین درخت پوشای مقید را پیدا کرد.

نتیجه بررسی‌های خود را در گزارش پروژه به طور کامل شرح دهید، موارد خواسته شده در فاز سوم در مورد الگوریتم خود را (ساختار درخت جستجو و تابع کران پایین) برای فاز چهارم نیز در گزارش پروژه ذکر کنید.

فرمت ورودی

```
n e
u1 v1 w1 m1
u2 v2 w2 m2
...
ue ve we me
h
unharmed_u1 unharmed_v1
...
unharmed_uh unharmed_vh
B
```

در خط اول اعداد n (تعداد شهرها) و e (تعداد کل کابل‌های پیشنهادی و موجود در نقشه امپراتوری) داده می‌شود. در e خط بعدی، هر خط شامل چهار عدد خواهد بود که مشخصات کابل‌ها را تعیین می‌کند:

- u_i : شهر مبدأ
- v_i : شهر مقصد

- w_i : هزینه ساخت اولیه کابل
- m_i : هزینه نگهداری سالانه کابل

سپس در یک خط عدد h (تعداد کابل‌هایی که در طول طوفان سالم مانده‌اند و بدون هزینه ساخت در دسترس هستند) داده می‌شود و در h خط بعدی، دو سر هر یک از این کابل‌های سالم‌مانده قرار دارد.
در خط آخر، عدد B که نشان‌دهنده حداکثر بودجه مجاز دپارتمان برای مجموع هزینه‌های نگهداری سالانه «کابل‌های جدید» است، داده می‌شود.

فرمت خروجی

در صورتی که ساخت درخت پوشا با رعایت قید بودجه نگهداری برای کابل‌های جدید ممکن نباشد (یا به دلیل قطع ارتباطات، اصلاً امکان تشکیل یک درخت پوشای متصل وجود نداشته باشد):

```
NO
```

در صورتی که ساخت شبکه بازسازی‌شده ممکن باشد:

```
optimal_construction_cost
new_cables_maintenance_cost
n-1
u_1 v_1
u_2 v_2
...
u_n-1 v_n-1
```

- اگر با رعایت شروط مسئله نتوان درخت پوشای معتبری ساخت، تنها عبارت NO چاپ شود.
- در غیر این صورت:
  - در خط اول کمینه هزینه کل ساخت درخت پوشا چاپ شود (واضح است که کابل‌های سالم‌مانده، هزینه ساخت صفر خواهند داشت و خروجی تنها مجموع هزینه ساخت کابل‌های جدید است).
  - در خط دوم، مجموع هزینه نگهداری «کابل‌های جدید» انتخاب‌شده در درخت نهایی چاپ شود (این مقدار باید کوچکتر مساوی B باشد).
  - در خط سوم تعداد یال‌های درخت $(n-1)$ چاپ شود.
  - در $n-1$ خط بعدی، یال‌های انتخاب‌شده در شبکه بازسازی‌شده نهایی چاپ شوند.

ترتیب چاپ یال‌ها اهمیتی ندارد.

۶ نکات تکمیلی

- پروژه‌ها به صورت گروهی انجام می‌شوند.
- خوانایی کد و داشتن کامنت‌های ضروری برای فهم منطق الگوریتم الزامی است.
- نوشتن داکیومنت کامل برای هر چهار فاز پروژه الزامی است.

- مهلت انجام پروژه تا پایان روز ۱۴ تیر است و به هیچ عنوان **تمدید نخواهد شد**.
- ارائه پروژه پس از موعد مقرر انجام خواهد شد.

موفق باشید!